1. ZADAĆA

1. Odredite razvoje u jednostavne verižne razlomke sljedećih brojeva:
   a) $\frac{164}{111}$, b) $\frac{15-\sqrt{11}}{3}$, c) $\sqrt{53}$.

2. Odredite realne brojeve čiji je razvoj u jednostavni verižni razlomak:
   a) $[1,2,6,\overline{2,1,1,3,2}]$, b) $[3,\overline{2,1,1,2,6}]$.

3. Neka je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat. Dokažite da je

   $$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \cdots, a_{r-1}, 2a_0}],$$

   pri čemu vrijedi da je $a_1 = a_{r-1}$, $a_2 = a_{r-2}$, itd.

4. Nađite sva rješenja nejednadžbe

   $$\left|\sqrt{19} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{3q^2},$$

   gdje je $\gcd(p,q) = 1$ i $q < 500$.

5. Neka je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat. Dokažite da je skup

   $$S = \{x + y\sqrt{d} \,:\, x^2 - dy^2 = 1, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}\}$$

   multiplikativna ciklička grupa.

6. Odredite barem dva netrivijalna rješenja jednadžbe $x^2 - (k^2-2)y^2 = 1$, $k \geq 2$.

7. Neka je (x_n, y_n) niz rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$. Dokažite tzv. *identitete zbroja* i *razlike*:

   $$\begin{aligned} x_{m\pm n} &= x_m x_n \pm d y_m y_n, \\ y_{m\pm n} &= x_n y_m \pm x_m y_n, \; m \geq n. \end{aligned}$$

8. Neka je $d \in \mathbb{N}$ koji nije potpun kvadrat i $N \in \mathbb{Z}$ takav da je $|N| < \sqrt{d}$. Dokažite ako je $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ rješenje pellovske jednadžbe $x^2 - dy^2 = N$, onda je $\frac{u}{v}$ neka konvergenta razvoja $\sqrt{d}$ u verižni razlomak.

9. Odredite najmanji prirodan broj n veći od 1 za koji je kvadratna sredina prvih n prirodnih brojeva prirodan broj.

10. Odredite fundamentalna rješenja jednadžbe $x^2 - 10y^2 = 9$.

11. Dokažite da ako jednadžbe $x^2 - 5y^2 = a$ i $x^2 - 5y^2 = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, \neq 0$, imaju rješenje, onda i jednadžba $x^2 - 5y^2 = ab$ ima rješenje.